Tentamen Vectoranalyse

27 augustus 2007, 9:00-12:00 uur

Het tentamen bestaat uit de onderstaande **vier** opgaven. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal voor deze opgave te behalen punten vermeld. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (10+5+10 pt.)
Het oppervlak S is gegeven door de vergelijking

$$x^2 + y^2 - f(z) = 0,$$

waarbij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^2-functie is met $f(0) = 0$ en $f'(0) = 1$.

1. Bewijs dat het raakvlak aan S in $(0, 0, 0)$ horizontaal (evenwijdig aan het xy-vlak) is.
2. Bewijs dat het oppervlak S in de buurt van $(0, 0, 0)$ geschreven kan worden als grafiek van een C^1-functie g van twee variabelen, d.w.z.

$$z = g(x, y),$$

   met $g(0, 0) = 0$.
3. Je mag aannemen dat de functie g uit onderdeel 2 zelfs een C^2-functie is. Toon aan dat deze functie g in $(0, 0)$ een lokaal minimum heeft.

Opgave 2 (12+8 pt.)
De functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y, z) = x + yz$. Het boloppervlak S is gegeven door $g(x, y, z) = 0$, met $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

1. Toon aan dat f op S twee kritieke punten heeft.
2. Bepaal de maximale en minimale waarde van f op S.

Z.O.Z.

Opgave 3 (9+8+8 pt.)
Het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ is gegeven door

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x}{r^3}\,\mathbf{i} + \frac{y}{r^3}\,\mathbf{j} + \frac{z}{r^3}\,\mathbf{k},$$

waarbij $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

1. Bereken

$$\iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

waarbij S_b het boloppervlak is met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ ($b > 0$).

2. Het volume $B \subset \mathbb{R}^3$ heeft gladde rand ∂B, en bevat de oorsprong $(0,0,0)$ niet. Toon aan:

$$\iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

3. De oorsprong $(0,0,0)$ ligt binnen een gesloten C^1-oppervlak S. Bereken

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Opgave 4 (6+14 pt.)
Het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3$ is gegeven door:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k}, \tag{1}$$

waarbij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^1-functie is. Het oppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ is de grafiek van de functie f, dus

$$S = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}.$$

1. Bereken de rotatie van $\mathbf{F}$.

2. Bewijs dat voor elke enkelvoudige gesloten C^1-kromme C op S geldt:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Uitwerkingen

Opgave 1. Laat $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - f(z)$, dan is $S = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$.

1. Het raakvlak aan S in $(0, 0, 0)$ heeft vergelijking

$$\nabla F(0,0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Aangezien

$$\nabla F(0,0,0) = -\mathbf{k}, \tag{2}$$

wordt deze vergelijking

$$z = 0.$$

Dit vlak is (evenwijdig met) het xy-vlak.

2. Aangezien $F_z(0, 0, 0) = -1 \neq 0$, geldt volgens de Impliciete Functiestelling dat er een C^1-functie g is, gedefiniëerd op een omgeving van $(0, 0)$, zó dat $g(0, 0) = 0$, terwijl $F(x, y, z) = 0$ in de buurt van $(0, 0, 0)$ als oplossing heeft: $z = g(x, y)$.

3. Uit $F(x, y, g(x, y)) = 0$ volgt via impliciet differentiëren:

$$\begin{aligned} F_x(x, y, g(x, y)) + g_x(x, y)\, F_z(x, y, g(x, y)) &= 0, \\ F_y(x, y, g(x, y)) + g_y(x, y)\, F_z(x, y, g(x, y)) &= 0. \end{aligned}$$

Invullen van $(x, y) = (0, 0)$ en gebruik maken van (2) geeft:

$$g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0,$$

dus $(0, 0)$ is een kritiek punt van g. Nogmaals impliciet differentiëren geeft:

$$\begin{aligned} F_{xx} + 2g_x\, F_{xz} + (g_x)^2\, F_{zz} + g_{xx}\, F_z &= 0, \\ F_{xy} + (g_x\, F_{yz} + g_y\, F_{xz}) + g_x\, g_y\, F_{zz} + g_{xy}\, F_z &= 0, \\ F_{yy} + 2g_y\, F_{yz} + (g_y)^2\, F_{zz} + g_{yy}\, F_z &= 0, \end{aligned}$$

waarbij de afgeleiden van F berekend worden in $(x, y, g(x, y))$, en de afgeleiden van g in (x, y). Neem $(x, y) = (0, 0)$, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} F_{xx}(0,0,0) - g_{xx}(0,0) &= 0, \\ F_{xy}(0,0,0) - g_{xy}(0,0) &= 0, \\ F_{yy}(0,0,0) - g_{yy}(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$g_{xx}(0,0) = 2, g_{xy}(0,0) = 0, g_{yy}(0,0) = 2.$$

De Hessiaan van g in $(0, 0)$ is dus positief definiet, dus g heeft een lokaal minimum in $(0, 0)$.

Opgave 2. We moeten de extrema van $f(x, y, z)$ bepalen onder de nevenvoorwaarde $g(x, y, z) = 0$. We gebruiken de methode van Lagrangemultiplicatoren, en lossen op:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z), \\ g(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Dit geeft het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x, \\ z &= 2\lambda y, \\ y &= 2\lambda z, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Uit de tweede en de derde vergelijking volgt door vermenigvuldiging: $yz = 4\lambda^2 yz$, en dus $4\lambda^2 = 1$ of $yz = 0$. We behandelen deze gevallen afzonderlijk.
Geval 1: $4\lambda^2 = 1$. Dan geldt: $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, en dus $x = \pm 1$ (m.b.v. de eerste vergelijking). Uit de tweede (en derde) vergelijking volgt dan $y = \pm z$. Vullen we dit in in de vierde vergelijking, dan krijgen we: $1 + 2y^2 = 1$, dus $y = 0$, en dus ook $z = 0$. We krijgen dus:

$$(\lambda; x, y, z) = (\pm\frac{1}{2}; \pm 1, 0, 0).$$

Geval 2: $yz = 0$. Uit de eerste vergelijking volgt: $\lambda \neq 0$, dus uit de tweede vergelijking volgt $y = z = 0$. Invullen in de vierde vergelijking geeft: $x = \pm 1$, en we zitten dus weer in het eerste geval. M.a.w.: we vinden geen nieuwe oplossingen.

Dus f heeft op S de kritieke punten:

$$(\pm 1, 0, 0).$$

2. Omdat S een compact (gesloten en begrensd) oppervlak is, en f continu is, heeft f op S een maximum en een minimum. Op grond van het eerste deel van de opgave concluderen we dat f op S haar minimale waarde -1 aanneemt in $(-1, 0, 0)$ en haar maximale waarde 1 aanneemt in $(1, 0, 0)$.

Opgave 3.
1. De normaal op S_b is de vector $\mathbf{n} = \frac{1}{b}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$. Dus:

$$\begin{aligned} \iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= \iint_{S_b} \frac{1}{b^2}\, dS \\ &= \frac{1}{b^2} \operatorname{Opp} S_b \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

2. Rekenen geeft $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 0$. De stelling van Gauß geeft dus:

$$\iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = 0.$$

3. Laat S_b het oppervlak zijn van een klein bolletje met middelpunt in de oorsprong, waarvan de straal b zo klein is dat S_b geheel binnen S ligt. Laat D het volume zijn dat wordt begrensd door S_b en S. Oriënteer S_b met naar binnen gerichte normaal, en S met naar buiten gerichte normaal, dan geldt volgens de stelling van Gauß:

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{D} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = 0.$$

Hieruit volgt:

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi.$$

Opgave 4.

1. Rekenen geeft $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = f_y(x, y)\,\mathbf{i} - f_x(x, y)\,\mathbf{j}$.

2. Stel C sluit op S het gebied B in, dan gebruiken we de stelling van Stokes:

$$\int_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{B} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Laat D de projectie van B op het xy-vlak zijn, dan is een parametrisering van B:

$$\mathbf{X}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \qquad \text{voor } (x, y) \in D.$$

Dus de normaal is

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{X}_x \times \mathbf{X}_y = -f_x(x, y)\,\mathbf{i} - f_y(x, y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned}
\iint_{B} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{D} (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{X}(x, y)) \cdot \mathbf{N}(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{D} (f_y(x, y)\,\mathbf{i} - f_x(x, y)\,\mathbf{j}) \cdot (-f_x(x, y)\,\mathbf{i} - f_y(x, y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dx \, dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$